



# ПОБУДОВА ТА ОБЧИСЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОШИРЕННЯ КІЛЬЦЕВИХ МОД В ТРУБОПРОВОДІ СПРЯМОВАНИМИ ХВИЛЯМИ В УЛЬТРАЗВУКОВОМУ ДІАПАЗОНІ ЧАСТОТ

І. З. ЛЮТАК

*Представлено математичну модель поширення спрямованих ультразвукових хвиль в криволінійному пружному просторі. При розробленні математичної моделі увагу приділено теоретичним засадам опису властивостей спрямованих хвиль в пружному середовищі. Отримані результати обчислень представлені у вигляді графіка дисперсії кутового хвильового числа.*

*The paper presents a mathematical model of propagation of directional ultrasonic waves in a curvilinear elastic medium. During development of the mathematical model attention was focused on theoretical fundamentals of description of directional waves in an elastic medium. The derived calculation results are presented in the form of a graph of dispersion of the angular wave number.*

Збільшення експлуатаційної надійності газо- та нафтопровідної системи України є важливим та актуальним завданням сьогодення. Одним із підходів до підвищення надійності є удосконалення методів неруйнівного акустичного контролю. Переваги використання акустичних хвиль, їх безпечність як для фахівця-контролера, так і для об'єкту контролю, поставили цей вид неруйнівного контролю на перше місце за його поширенням серед інших методів. Проте деякі недоліки акустичних методів, а саме, точковість вимірювань при проведенні контролю великогабаритних конструкцій, таких як газо- та нафтопроводи, знижують ефективність та збільшують вартість контролю. Тому одним із підходів удосконалення акустичних методів для неруйнівного контролю таких великогабаритних конструкцій є розвиток теорії акустичного поля з метою застосування нових типів хвиль, які б дозволили уникнути точковості вимірюваних результатів. Наслідком такого підходу є розвиток теорії спрямованих хвиль, що поширюються на значні відстані без суттєвого згасання амплітуди.

В Україні суттєвий внесок в розвиток теорії спрямованими хвилями внесено науковцями ІЕЗ ім. Є. О. Патона НАН України [1, 2]. Основним науковим напрямком їх роботи є вивчення принципів побудови діагностичних систем протяжних об'єктів на основі низькочастотного ультразвуку, а наукова діяльність тісно пов'язана із європейським досвідом дослідження спрямованих ультразвукових хвиль в рамках проекту Євросоюзу «Моніторинг стану об'єктів шляхом далекодуючого ультразвуку». Проведено дослідження систем збудження та прийому спрямованих хвиль низькочастотного ультразвуку. Стверджується, що для збудження і прийому відбитих від завад спрямованих хвиль можна використовувати різні типи первинних перетворювачів, зокрема: магнітострикційні, електро-

магнітоакустичні та п'єзоелектричні [3, 4]. Приведено основні параметри вказаних трьох типів первинних перетворювачів. Дослідження спрямованих ультразвукових хвиль проводиться також науковцями лабораторії неруйнівного контролю кафедри методів та приладів контролю якості та сертифікації продукції Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу [5–8]. Дослідження проводяться в напрямку побудови пристрою неруйнівного контролю напружено-деформованого стану металу спрямованими хвилями з використанням п'єзоелектричних первинних перетворювачів. Складовою таких досліджень є розроблення математичної моделі поширення спрямованих хвиль в прямолінійному пружному середовищі, в стінці труби та побудова алгоритмів обробки сигналів відбитих хвильових пакетів. Теоретичні дослідження взаємодії спрямованих хвиль із тріщинами проводяться в Росії [9]. Таким чином, можна зробити висновок, що неруйнівний контроль спрямованими ультразвуковими хвилями знаходиться на початку свого розвитку. Кількома науковими групами в світі проводяться дослідження як теоретичних, так і технологічних аспектів фізичного явища далекодуючого ультразвуку. Існуючі досягнення дозволяють побачити перспективність такого напрямку неруйнівного контролю та визначити основні ніші для його застосування.

*Метою даного дослідження є удосконалення теорії поширення кільцевих мод спрямованих ультразвукових хвиль, що дозволить глибше зрозуміти фізичні аспекти його поширення в стінці трубопроводу, взаємодію на хвильові параметри механічних та геометричних характеристик розглядуваного трубопроводу.*

**Теоретичні основи поширення об'ємних ультразвукових хвиль.** Розглянемо поширення ультразвукової хвилі в пружному середовищі без межі



розділу цього середовища. Будемо вважати, що середовище є настільки великим, ніж довжина хвилі, що поширення ультразвуку не зазнає впливу від відбитих хвиль.

При поширенні ультразвукової хвилі в пружному середовищі нею створюються вимушені коливання елементарного об'єму пружного середовища. Для характеристики цих коливань введемо вектор зміщення елементарного об'єму  $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ , що описуватиме амплітуду максимального відхилення. Для розуміння фізичного змісту вектора зміщення необхідно зазначити, що під елементарним об'ємом розуміється не окремі молекули чи атоми середовища, що коливаються без наявності звукової енергії, а деякий об'єм цього середовища, який містить певну кількість молекул так, що їх сумарний тепловий рух дорівнює нулю [10]. Коливання таких елементарних об'ємів пружного середовища нагадує коливання твердих тіл в механіці, в якій прийнято описувати коливання через поняття вектору швидкості  $\vec{v}$ . Термін вектору швидкості коливання елементарного об'єму пружного середовища потрібно розділити від вектору швидкості поширення ультразвукових хвиль. Швидкість коливань елементарного об'єму пружного середовища буде наступною:

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{t} \quad (1)$$

де  $t$  — час.

Під процесом поширення ультразвукових коливань в термінах коливання елементарного об'єму мається на увазі передача зусилля від збуреного елементарного об'єму до незбуреного. При цьому завжди має лише затримку в часі, що визначає швидкість поширення ультразвукової хвилі. По всій довжині хвилі різні елементарні об'єми пружного середовища будуть мати різне зміщення: одні частини — позитивне, інші — негативне і т. д. Це створює деформації пружного середовища на рівні елементарних об'ємів. Згідно теорії механіки в такому об'ємі створюється шість незалежних компонент напружень  $\sigma_{ij}$ . Ультразвукова хвиля, в загальному, створить напруження, які можна описати в напрямку однієї вісі  $Ox$  таким чином:

$$\begin{aligned} & [\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}]dydz + [\sigma_{xy}(y+dy) - \sigma_{xy}]dxdz + \\ & + [\sigma_{xz}(z+dz) - \sigma_{xz}]dxdy = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dxdydz, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $dx, dy, dz$  — зміщення елементарного об'єму пружного середовища, створене ультразвуковою хвилею.

Вираз (2) описує зусилля, що прикладене до певного об'єму середовища, тому, згідно II закону Ньютона, для забезпечення балансу сил повинна існувати протидія цьому зусиллю. Цією протидією є сила інерції пружного середовища, що визначається масою елементарного об'єму  $\rho dxdydz$ , задіяною ультразвуковою хвилею. Рівняння рівноваги сил буде таким:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Аналогічно рівняння рівноваги сил (3) можна записати для двох інших напрямків  $Oy$  та  $Oz$ .

Описувана сила в виразі (3) викликає розтяг чи зсув елементарного об'єму пружного середовища. В будь-якій механічній системі діють сили, що спрямовані на відтворення первинного стану. Ці сили визначаються через деформації елементарного об'єму пружного середовища. Рівняння рівноваги напружень, викликаних зусиллям проходження ультразвукової хвилі та зусиль, спрямованих на відтворення попереднього стану, можна представити так:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \vec{u}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (4)$$

де  $\mu, \lambda$  — константи Ляме,  $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$  — оператор дивергенції.

Рівняння (4) можна за аналогією записати для двох інших координатних осей. Привівши (3) та (4) в одне рівняння, отримаємо опис коливання елементарного об'єму пружного середовища при проходженні ультразвукової хвилі:

$$\begin{aligned} \mu \Delta u_x + (\mu + \lambda) \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{u})}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \mu \Delta u_y + (\mu + \lambda) \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{u})}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\ \mu \Delta u_z + (\mu + \lambda) \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{u})}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  — оператор Лапласа.

Рівняння (5) є загальним описом пружного середовища, збуреного ультразвуковою хвилею. Проводити аналіз (5) в загальному записі є надзвичайно складно, оскільки його розв'язком є багато різних комбінацій хвиль, що поширюються в довільному напрямку. Для спрощення аналізу припустимо, що ультразвукова хвиля є плоскою і поширюється в напрямку однієї координатної вісі, наприклад  $x$ . В цьому випадку компоненти оператора Лапласа та дивергенції зменшаться тільки до одного, а вираз (5) матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\ \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Перше рівняння описує коливання елементарного об'єму пружного середовища, що співпадає за напрямком із поширенням ультразвукової хвилі.



Такою хвилею є поздовжня і відповідно вона створює тільки один компонент тензору напружень  $\sigma_{xx}$ . Два інші рівняння (6) описують коливання елементарного об'єму в напрямку, що перпендикулярний поширенню ультразвукової хвилі. Такі коливання збуджують тільки зсувні напруження  $\sigma_{xy}$  та  $\sigma_{xz}$ . Очевидно, що навіть у спрощеному розгляді поширення ультразвукової хвилі в пружному середовищі може бути багато розв'язків, які залежать від напрямку поширення хвилі та від співвідношення їх амплітуд.

У виразі (6) кожне рівняння правої і лівої частини описує рівність швидкості коливання через зміщення елементарного об'єму пружного середовища, тому частково продиференціювавши ліву частину по  $x$  та праву по  $t$ , отримуємо значення для швидкості поширення ультразвукової хвилі:

$$c_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (7)$$

де  $c_p$ ,  $c_t$  — відповідно швидкості поширення поздовжньої та поперечної хвиль.

Розглянемо коливання частинок середовища, збуджених поперечною хвилею. Припустимо, що частинки коливаються за гармонійним законом:

$$\begin{aligned} u_y(x,t) &= U_y \cos(\omega t - k_x x - \varphi_1), \\ u_z(x,t) &= U_z \cos(\omega t - k_x x - \varphi_1), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $k_t = \omega/c_t$  — хвильове число;  $\omega$ ,  $\varphi_i$  — відповідно частота та фаза коливань;  $U_y$ ,  $U_z$  — амплітуди коливань.

Напрямок коливань елементарних частинок середовища визначається із (8) за кутом із віссю  $Oy$  так:

$$\angle \alpha = \arctan(U_y/U_z). \quad (9)$$

У випадку, коли  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , поперечні коливання поляризуються у еліптичні, що є загальним випадком ультразвукової хвилі в пружному середовищі.

Рівняння (7)–(9) дають підстави стверджувати, що поздовжні та поперечні ультразвукові хвилі можуть поширюватись в будь-якому напрямку в пружному середовищі, причому швидкість поширення таких хвиль не залежить від напрямку. Тому при розгляді властивостей таких хвиль не беруться до уваги межі розділу пружного середовища із навоколишнім.

**Ультразвукові хвилі в пластинах.** Розглянемо поширення ультразвукових хвиль в пластині. Припустимо, що пластинка має нескінченну довжину в напрямку вісі  $x$ , одну товщину та ізотропні властивості матеріалу. Нехай напрям поширення ультразвукових хвиль співпадає із координатою  $x$ . Розширення, яке створюватиме ультразвукова хвиля, буде таким:

$$\delta l/l = 1/E \cdot F/S, \quad (10)$$

де  $\delta l$  — відносне видовження довжини;  $E$  — модуль Юнга;  $F$  — зусилля, створене хвилею;  $S$  — площа поперечного перерізу.

Зусилля  $F$ , створене ультразвуковою хвилею, створить напруження в напрямку вісі  $x$ :

$$\sigma_{xx} = E \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (11)$$

Іншим зусиллям, що діє в пластині, є зусилля згину. При цьому зусиллі відносне видовження шару пружного середовища, що лежить всередині пластини, не знає відносного видовження. Частина пластини під і над серединним шаром зазнає стискування та видовження на величину  $dx$ . Напруження визначаються через момент  $M$ , що пропорційний радіусу кривизни, а отже і другій похідній від переміщення:

$$M = -K \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \quad (12)$$

де  $K = \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2}$  — коефіцієнт;  $h$  — товщина пластини;  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона.

Рівняння (5), (10)–(12) визначають взаємозв'язок між константами Ляме та модулем Пуассона:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (13)$$

Рівність (13) та (7) визначають взаємозв'язок між швидкостями поздовжньої та поперечної хвиль:

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}}. \quad (14)$$

Рівняння (10)–(14) описували деформацію пластини в статичному чи квазістатичному режимі, при якому не враховувалась швидкість деформації. При поширенні ультразвукової хвилі швидкість деформації має значний вплив у формі інерції елементарного об'єму пружного середовища, тому рівняння поширення хвилі буде ґрунтуватись на рівновазі зусиль:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (15)$$

За аналогією до виразу (6) та на основі рівності (15) рівняння поширення ультразвукової хвилі буде таким:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (16)$$

Із (16) швидкість поширення ультразвукових хвиль, в яких елементарний об'єм пружного середовища рухається у напрямку поширення хвилі, буде такою:



$$c_a = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (17)$$

Рівняння (17) описує коливання елементарного об'єму, в якому переважає поздовжня складова ультразвукової хвилі. Воно справджується тільки у випадку, коли товщина пластини є меншою, ніж довжина ультразвукової хвилі. У іншому випадку на швидкість хвилі буде впливати її товщина і тому вони будуть мати дисперсійний характер. Ці хвилі називають антисиметричними, оскільки коливання верхніх граней пластини проходять у протифазі (рис. 1, а).

Як видно із рис. 1, а напрям зміщення елементарного об'єму пружного середовища не повністю збігається із напрямком поширення хвилі в пластині, проте характер коливань (періодичне стиснення та розширення середовища) робить таку хвилю подібною до об'ємної поздовжньої.

Збудження антисиметричної моди у найбільш простому випадку можливе при прикладанні зусилля у напрямку довжини пластини. Аналогічно, при прикладанні зусилля до поверхні пластини, збуджуються зсувні хвилі, які називаються симетричними, оскільки їх грані коливаються в одній фазі (рис. 1, б).

Рівняння поширення симетричних хвиль буде таким [10]:

$$\Delta^2 u_x + 12\rho \frac{1-\nu^2}{h^2 E} \frac{\partial u_x}{\partial t^2} = 0. \quad (18)$$

Подібно до антисиметричних мод, зміщення елементарного об'єму пружного середовища не є повністю поперечними, проте їх властивості подібні до поперечних об'ємних хвиль.

Розв'язок (18) є складнішим ніж для антисиметричних мод, оскільки незалежними змінними є зміщення перпендикулярне до напрямку поширення хвилі  $u_y$  та його похідна, згинний момент  $M$  та зусилля  $F_y$ . Незалежними змінними при поширенні

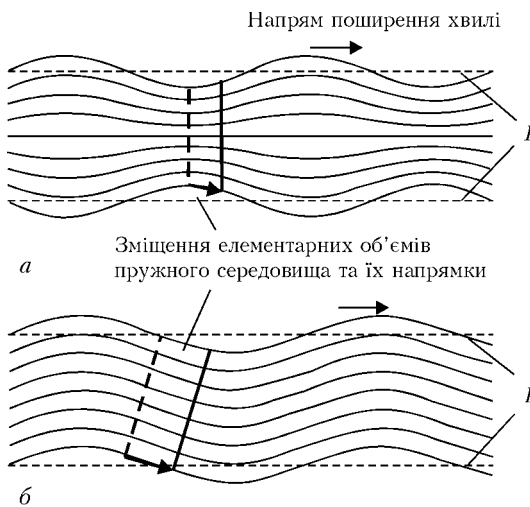


Рис. 1. Поширення антисиметричної (а) та симетричної (б) моди ультразвукової хвилі ( $l$  — межі розділу у незбудованій ультразвуковою хвилею пластині)

антисиметричної моди є зміщення  $u_x$  та напруження  $\sigma_{xx}$ .

Розв'язком (18) є:

$$u(x,t) = U_x \exp\left(\pm x \sqrt{\omega^2 12\rho \frac{1-\nu^2}{h^2 E}} \exp(j\omega t)\right). \quad (19)$$

Останній множник виразу (19) вказує на гармонійну складову поширення хвилі. Перший експоненціальний множник описує коливання амплітуди хвилі.

**Поширення спрямованої ультразвукової хвилі в криволінійному середовищі.** Для побудови математичної моделі поширення кільцевих мод в трубопроводі візьмемо за основу циліндричну систему координат  $r, \theta, z$ , (рис. 2).

Будь-яка пружна хвиля, в тому числі і кільцеві моди спрямованих хвиль, можуть бути представлені загальним фундаментальним хвильовим рівнянням аналогічно до (3):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для спрощення цих рівнянь використаємо підхід розділу хвильових полів Хельмгольца. Для цього представимо закон коливань елементарних частинок у двох напрямках поляризації хвильового поля для поздовжніх  $\phi$  та поперечних  $\psi$  хвиль:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + k_l^2 \phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_t^2 \psi &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $k_l$  та  $k_t$  — відповідно хвильові числа для поздовжньої та поперечної об'ємної ультразвукової хвилі.

Хвильове число для об'ємних ультразвукових хвиль може бути обчислене так:

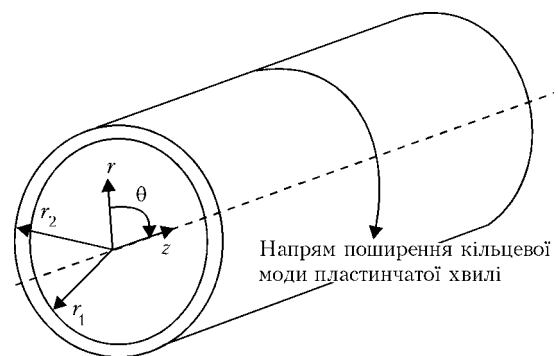


Рис. 2. Поширення кільцевих мод ультразвукової пластинчастої хвилі в трубі:  $r_1, r_2$  — відповідно внутрішній та зовнішній радіуси труби

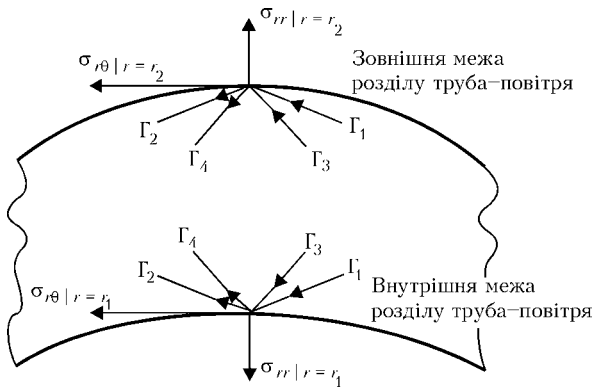


Рис. 3. Граничні умови при поширенні кільцевої моди ультразвукової спрямованої хвилі

$$k_l = \frac{\omega}{c_l}, \quad k_t = \frac{\omega}{c_t}. \quad (22)$$

Гармонійні коливання описуватимуться так:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \Phi(r) \exp(ik_\theta \theta), \\ \psi(r, \theta) &= \Psi(r) \exp(ik_\theta \theta), \end{aligned} \quad (23)$$

де  $k_\theta$  — кутове хвильове число.

Підставивши (23) в (21), отримаємо математичний опис кільцевої моди спрямованої хвилі за двома її складовими, об'ємними поздовжніми та поперечними хвилями [11]:

$$\begin{aligned} (k_r r)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (k_r r)^2} + (k_r r) \frac{\partial \Phi}{\partial (k_r r)} + ((k_r r)^2 - k_\theta^2) \Phi &= 0, \\ (k_r r)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (k_r r)^2} + (k_r r) \frac{\partial \Psi}{\partial (k_r r)} + ((k_r r)^2 - k_\theta^2) \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Представимо (24) за допомогою функцій Бесселя:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Gamma_1 J(k_r r) + \Gamma_2 Y(k_r r), \\ \Psi &= \Gamma_3 J(k_r r) + \Gamma_4 Y(k_r r), \end{aligned} \quad (25)$$

де  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  — амплітуди об'ємних поздовжніх та поперечних ультразвукових хвиль.

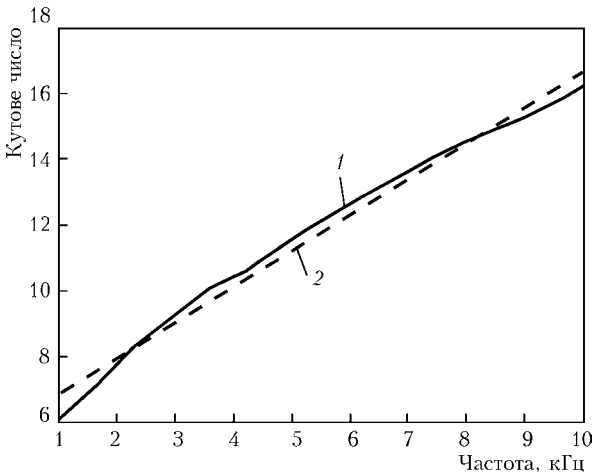


Рис. 4. Дисперсійна крива кутового числа спрямованої ультразвукової хвилі в трубі діаметром 273 мм: 1 — апроксимація сплайном; 2 — лінійна апроксимація

Для визначення граничних умов визначимо компоненти вектору напружень елементарного об'єму пружного середовища на межі розділу пружне середовище — повітря. З цією метою визначимо напруження, створені зміщенням від проходження ультразвукової спрямованої хвилі:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\lambda k_l^2 \varphi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Граничні умови для (26) зображено на рис. 3.

Як видно із рис. 3, кожен компонент напружень  $\sigma_{rr}$  та  $\sigma_{r\theta}$  формується чотирма об'ємними ультразвуковими хвилями, поздовжніми та поперечними.

Для знаходження невідомих амплітуд об'ємних хвиль (25) запишемо характеристичне рівняння, що характеризує хвильове поле на межі розділу середовищ труба-повітря [11]:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{14} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \Lambda_{34} \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{42} & \Lambda_{43} & \Lambda_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (27)$$

де  $\Lambda_{ij}$  — члени характеристичної матриці, які визначаються частотою та хвильовим числом.

Для числового розв'язку (27) необхідно знати один із компонентів матриці  $\Gamma_i$ . З іншої сторони, компоненти характеристичної матриці складаються із функцій Бесселя та першої, другої її похідних. Для рішення (27) необхідно знайти значення детермінанту  $\Lambda_{ij}$ . Нами розроблено алгоритм розв'язку (27) в середовищі Matlab. Результати розрахунку детермінанту (27) для газопроводу діаметром 273 мм приведені на рис. 4.

Отримані результати дозволяють визначити параметри симетричної та антисиметричної мод спрямованих хвиль в криволінійному пружному просторі.

Результати розрахунку детермінанта (27) апроксимувались сплайном із коефіцієнтом апроксимації 0,99 та прямою лінією. Як видно із рис. 4, числовий розв'язок містить неточності, пов'язані із пошуком кореня (27), який виконувався алгоритмом пошуку кореня пакету Matlab. Для покращення отриманого результату необхідно розробити новий підхід до обчислення першої та другої похідної функцій Бесселя та алгоритму числового пошуку кореня функції.

Целью данного исследования является усовершенствование теории распространения кольцевой моды направленной ультразвуковой волны, что позволит глубже понять физические аспекты ее распространения в стенке трубопровода, взаимодействие волновых параметров с механическими и геометрическими характеристиками рассматриваемого трубопровода. Понимание процесса распространения ультразвуковых колебаний в терминах ко-



лебания элементарного объема — это передача усилия от возмущенной части среды к невозмущенной. Это создает деформацию упругой среды на уровне элементарных объемов. Согласно теории механики в таком объеме создается шесть независимых компонент напряжений (2).

Выражение (2) описывает усилие, которое прилагается к определенному объему среды, и согласно II закону Ньютона для обеспечения баланса силы должно существовать противодействие этому усилию. Этим противодействием является сила инерции упругой среды (5). Уравнение (5) является общим описанием упругой среды, возмущенной ультразвуковой волной. Проводить его анализ в общей записи чрезвычайно сложно, поскольку его решением является много различных комбинаций волн, которые распространяются в произвольном направлении. Для упрощения анализа допустим, что ультразвуковая волна является плоской и распространяется в направлении одной координатной оси, например  $x$  (6).

Уравнения (10)–(19) математически описывают форму колебаний направленной ультразвуковой волны в пластине на основании уравнения (6). Уравнение (17) описывает колебание элементарного объема, в котором преобладает продольная составляющая ультразвуковой волны. Оно выполняется только в случае, когда толщина пластины меньше, чем длина ультразвуковой волны. В другом случае на скорость волны влияет ее толщина, и поэтому она будет иметь дисперсионный характер. Эта волна называется антисимметричной, поскольку колебания верхней грани пластины проходят в противофазе, рис. 1. Аналогично представлено уравнение (18) для симметричной волны (рис. 2).

Уравнения (20)–(27) представляют математическое описание волновых параметров направленной ультразвуковой волны в стенке трубопровода (рис. 3). Представлены граничные условия для формирования этой волны в стенке трубы и ее распространения (рис. 4). Как видно из рис. 4, каждый компонент напряжений, вызванных направленной волной, формируется четырьмя объемными ультразвуковыми волнами, продольными и поперечными.

Для нахождения неизвестной амплитуды объемных волн, которые формируют направленную волну (25), составлено характеристическое уравнение на основании граничных условий раздела сред труба–

воздух. На рис. 5 представлен график дисперсии углового волнового числа от частоты. Полученные результаты позволяют определить параметры симметричной и антисимметричной моды направленной волны в стенке трубы.

1. Патон Б. Е., Троицкий В. А., Бондаренко А. И. Метод низкочастотного ультразвукового контроля протяженных объектов направленными волнами // Техн. диагностика и неразруш. контроль. — 2008. — № 2. — С. 20–30.
2. Троицкий В. О. Хвилеводний низькочастотний ультразвуковий контроль протяжених об'єктів з обмеженим доступом до поверхні // III Науково-практ. конф. «Організація неруйнівного контролю якості продукції в промисловості». — 30 квітня 2005. — Аланья (Туреччина). — С. 5–7.
3. Техника контроля направленными волнами для эксплуатационного контроля заводских трубопроводов / Т. Икэда, Р. Канэхара, М. Миадзева и др. // Nihakai Kensa. — 2005. — 54, № 11. — С. 595–599.
4. Ямасаки Т. Применение электромагнитных акустических сенсоров для направленных волн в неразрушающем контроле проволоки, труб и плит // Там же. — С. 606–611.
5. Lyutak I. Wavelet analysis of ultrasonic guided waves in pipeline inspection / IEEE Intern. workshop on intelligent data acquisition and advanced computing systems: technology and applications. — Sofia, Bulgaria. — P. 517–523.
6. Лютак І. З. Моделювання методом кінцевих елементів поширення нульових мод плоских хвиль Лемба в пластині з ортотропними механічними властивостями // Вісник Хмельницького нац. ун-ту. — 2007. — № 6. — Т. 1. — С. 151–156.
7. Лютак І. З., Мандра А. А. Визначення напружено-деформованого стану газопроводів за допомогою ультразвукових хвиль Лемба // Методи та прилади контролю якості. — 2004. — № 12. — С. 24–29.
8. Лютак І. З. Контроль технічного стану магістральних трубопроводів кільцевими модами пластинчатих ультразвукових хвиль // Зб. наук. праць. Сер.: Фізичні методи та засоби контролю середовищ, матеріалів та виробів. Теорія і практика неруйнівного контролю матеріалів і конструкцій. — Видання Фіз.-мех. ін-ту ім. Г. В. Карпенка НАН України. — 2008. — Вип. 13. — С. 193–198.
9. Взаємодія крутильних волн с продольними трещинами труб / Г. А. Буденков, О. В. Недзвецкая, Д. В. Злобин, С. А. Мурашов // Дефектоскопия. — 2006. — № 6. — С. 58–66.
10. Kuttruff H. Acoustics. An introduction. New York: Taylor & Francis. — 2007. — 472 p.
11. Fast techniques for calculating dispersion relations of circumferential waves in annular structures / J. Fong, M. J. S. Lowe, D. Gridin, R. V. Craster // Review of Progress in Quantitative NDE (American Institute of Physics). — 2003. — № 22. — P. 213–220.