УДК 621.314:621.396.66 DOI: https://doi.org/10.37434/tdnk2022.04.01

ДІАГНОСТИКА ПОШКОДЖЕНЬ ЗУБЧАСТИХ ПАР МЕТОДАМИ БІПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.

Частина 1. Теоретичні аспекти проблеми

І.М. Яворський[1,2], Р.М. Юзефович[1,3], О.В. Личак[1], Р.Т. Слєпко[1], М.З. Варивода[1], П.О. Семенов[4]

[1]Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України. 79060, м. Львів, вул. Наукова, 5. *E*-mail: roman.yuzefovych@gmail.com

[2]Бидгощська Політехніка. 85796, Польща, Бидгощ, алея проф. С. Каліськєго, 7

[3]Національний університет «Львівська політехніка». 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12

[4]Одеський національний морський університет. 65029, м. Одеса, вул. І. Мєчнікова, 34

Запропоновано та проаналізовано модель вібрації зубчастої пари у формі біперіодично корельованих випадкових процесів (БПКВП), що описує її стохастичну повторюваність з двома різними періодами. Показано, що запропоновані раніше в літературі моделі можна вважати окремими випадками БПКВП. Зазначається, що у разі пошкодження лише однієї з шестерень діагностику механізму можна проводити в рамках апроксимації БПКВП у вигляді періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП). Першим етапом у пропонованому підході є оцінка періоду нестаціонарності (основної частоти) зміни в часі моментних функцій першого та другого порядку. Отримано оцінки найменших квадратів (НК) періодів детермінованої частини вібраційного сигналу та потужності часових змін його стохастичної частини, а також проаналізовано амплітудні спектри детермінованих коливань і дисперсії стохастичних коливань для різних ступенів пошкодження зубчастої передачі. Запропоновано ефективні індикатори ступеня розвитку пошкодження зубчастої пари, які формуються на основі сум амплітуд компонент спектру детермінованої складової вібрацій. Бібліогр. 20.

Ключові слова: діагностика, біперіодичні корельовані випадкові процеси, періодична нестаціонарність, детерміновані коливання, амплітудний спектр, стохастична високочастотна модуляція

Вступ. Вібраційні сигнали обертових машин характеризуються різноманітністю ритміки, основними ознаками якої є циклічність і стохастичність. Несправності у поведінці машин призводять до виникнення нелінійних ефектів, а отже нелінійність спостерігатиметься у властивостях вібраційного сигналу. Взаємодія циклічності та стохастичності кількісно характеризується параметрами, що описують періодичну або майже періодичну зміну в часі моментних функцій першого та другого порядку циклостаціонарних випадкових процесів [1–3] (такі процеси також називають періодично або майже періодично корельованими випадковими процесами [4–6]). Тому ці параметри доцільно обирати для побудови індикаторів виявлення несправностей [7–12] для діагностики зубчастих пар.

Вібрація зубчастої пари збуджується двома основними факторами, а саме – періодичною зміною жорсткості зубів протягом фази зачеплення та неточностями виготовлення власне пари. До похибок виготовлення пари відносяться постійні та змінні похибки кроку зубів. Періодична зміна жорсткості зачеплення зумовлює появу гармонійних складових частоти зачеплення $f_m = rf_1 = nf_2$ та кратних їй частот, де f_1 і f_2 – частоти обертання коліс, r і n – натуральні числа. Випадкова похибка кроку зачеплення та неузгодженість осей валів проявляється появою гармонік з частотами обертання, а також комбінаційними частотами $pf_m + kf_1$, $pf_m + lf_2$, де p, k, l – цілі числа. Крім того, спектри вібраційного сигналу можуть включати компоненти, що лежать у певній смузі частот навколо резонансної частоти зубчастої пари у разі виникнення режиму віброудару.

Огляд методів для аналізу вібраційних сигналів зубчастих передач. Методи, запропоновані в [7, 13] для аналізу вібрації зубчастої пари, базуються на моделі похибки передачі, яку розглянуто в [14]:

$$x(\theta) = x_e(\theta)[W + x_m(\theta) + x_1(\theta) + x_2(\theta)], \qquad (1)$$

де W – постійне навантаження; $\theta = \theta(t)$ – кутове положення шестерні. Члени $x_m(\theta)$ і $x_e(\theta)$ описують контактні властивості шестерень, а $x_1(\theta)$ і $x_2(\theta)$ – похибки виготовлення зубчастої пари. Вважається, що кожен доданок $x_i(\theta)$ $i = \overline{1,2}$, є періодичним з періодом обертання $P_i = 1/f_i$ відповідної шестерні. Модель (1) містить три періодичні члени, а саме: $x_e(\theta)[W + x_m(\theta)]$, $x_e(\theta)x_1(\theta)$ і $x_e(\theta)x_2(\theta)$, які є періодичними функціями з періодами, $P_m = 1/f_m$, P_1 і P_2. Модель у вигляді циклостаціонарного процесу, запропоновану в [7, 13],

Юзефович Р.М. – https://orcid.org/0000-0001-5546-453X, Яворський І.М. – https://orcid.org/0000-0003-0243-6652, Личак О.В. – https://orcid.org/0000-0001-5559-1969

отримано введенням випадкової величини, що моделює флуктуації кутового положення зубчастих коліс. Математичне сподівання цього випадкового процесу містить гармонічні складові на частотах f_m, f_1, і f_2. Кореляційна функція включає три типи гармонік, а саме: гармоніки з частотами, які є лінійною комбінацією частот обертання $kf_1 + lf_2$, гармоніки частоти зачеплення nf_m та гармоніки з частотами, які є лінійною комбінацією частоти зачеплення та частот обертання, тобто $nf_m + kf_i$. Наявність нестаціонарності першого та другого порядків обґрунтовано обробкою вібраційних сигналів, виміряних для систем зубчастих передач [7, 13], а величини, що описують структуру циклостаціонарності (оцінену за допомогою синхронного усереднення) запропоновано використовувати для виявлення несправностей.

У [15, 16] вібраційний сигнал після застосування синхронного усереднення з періодом P_1 або P_2 подано у вигляді:

$$g\left(t\right)=\sum_{l=1}^{M}A_l\left[1+a_l\left(t\right)\right]\cos\left(2\pi f_l t+b_l\left(t\right)+\varphi_l\right) \quad (2)$$

де M – число гармонік зачеплення, а A_l та φ_l – відповідно амплітуда та фаза l-ї гармоніки. Ефекти модуляції описуються функціями $[l + a_l(t)]$ і $b_l(t)$, які є періодичними з заданим періодом обертання. Ці функції дуже близькі до детермінованої складової сигналу, що відповідає одному оберту вибраної зубчастої передачі. Виходячи з моделі (2), у [15, 16] запропоновано методи для покращення результатів аналізу вібросигналу. Один з них полягає у виключенні з (2) гармонік із частотою зачеплення зубів та кратних їм. Отриманий таким чином результуючий сигнал часто чіткіше демонструє ознаки несправностей, ніж вихідний (2). Ефективною технологією для виявлення локальних несправностей типу зламаний зуб є фільтрація сигналу (2) навколо l-ї гармоніки зачеплення зубчастого колеса та аналіз її амплітудно-фазової модуляції [15, 16].

У [14, 17] вібраційний сигнал редуктора моделюється наступним чином:

$$x(\theta) = x_1(\theta) + x_2(\theta) + x_{1,2}(\theta) + x_c(\theta) + n(\theta), \quad (3)$$

де $x_1(\theta)$ і $x_2(\theta)$ описують детерміновані періодичні коливання, що генеруються відповідно обертанням вихідного та вхідного коліс, $x_{1,2}(\theta)$ є періодичною складовою із загальним періодом $P_{12} = r_1P_1 + r_2P_2$, $x_c(\theta)$ є циклостаціонарним процесом другого порядку з періодом P_{12}, а $n(\theta)$ – флуктуаційна складова. Настільки, наскільки це можливо, детерміновану складову сигналу (3) можна виділити за допомогою синхронного усереднення із загальним періодом обертання валів P_{12} [14]. Результати проведеної авторами обробки експериментальних даних підтверджують їхнє припущення про те, що потужність випадкової складової є незначною порівняно з потужністю детермінованої.

Далі буде показано, що запропоновані в літературі моделі вібрації редуктора можна вважати окремими випадками їх представлення у вигляді БПКВП [6, 18]. Математичне сподівання та кореляційна функція цих процесів є біперіодичними функціями часу. Математичне сподівання описує модуляційну взаємодію детермінованих коливань, а кореляційна функція – взаємодію стохастичних складових. Ряд Фур'є математичного сподівання та кореляційної функції містить гармоніки частот обертання коліс, кратні гармоніки та їх комбінацій. Гармоніки частот зачеплення є окремими гармоніками БПКВП представлення сигналу. Конкретний склад гармонік детермінованих і стохастичних коливань залежить від ступеня розвитку дефекту та місця його розташування.

Оцінка всього комплексу характеристик першого та другого порядку БПКВП на основі експериментальних даних може бути трудомісткою та довготривалою, тому доцільно (за можливості) пом'якшувати вимоги, пов'язані з виявленням несправностей, використовуючи параметри БПКВП моделі сигналу. У даній роботі показано, що у випадку появи несправності, коли вона розвивається лише на одному з коліс, можна використовувати підхід періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП).

Основна новизна цієї роботи полягає у наступному:

– проаналізовано властивості моделі вібрації зубчастих передач у формі БПКВП та досліджено можливість використання апроксимації ПКВП для діагностики несправностей;

– для аналізу вібрації використовуються методи пошуку прихованих періодичностей першого та другого порядку;

– запропоновано найефективніші для практичного застосування показники, які формуються на основі амплітудних спектрів.

Окремі випадки біритмічної прихованої періодичності як моделі вібраційних сигналів. Задамо випадковий процес:

$$\xi\left(t\right)=\sum_{k,l\in Z}\xi_{kl}\left(t\right)e^{i\lambda_{kl}t}, \quad (4)$$

в якому $\xi_{kl}(t)$ – стаціонарно зв'язані випадкові процеси і $\lambda_{kl} = k(2\pi/P_1) + l(2\pi/P_2)$. Як видно, процес (4) є сумою амплітудно- та фазово-модульованих гармонік, у яких частоти λ_{kl} є лінійною комбінацією двох основних частот $\lambda_{10} = k(2\pi/P_1)$ і $\lambda_{01} = l(2\pi/P_2)$.

Виходячи з (4), можна досить легко отримати окремі випадки біритмічної прихованої періодичності:

1. Якщо $\xi_{kl}(t) = c_{kl} + \eta_{kl}(t)$, де $\eta_{kl}(t)$ – некорельовані стаціонарні випадкові процеси, а c_{kl} – деякі комплексні числа, то маємо адитивну модель модуляції:

$$\xi(t) = \sum_{k,l \in Z} c_{kl} e^{i\Lambda_{kl} t} + \sum_{k,l \in Z} \eta_{kl} e^{i\lambda_{kl} t} = s(t) + \eta(t),$$

де $s(t)$ – біперіодична функція, а $\eta(t)$ – стаціонарний випадковий процес з кореляційною функцією:

$$R(\tau) = \sum_{k,l \in Z} r_{kl}^{(\eta)}(\tau) e^{i\lambda_{kl}\tau},$$

де $r_{kl}^{(\eta)}(\tau) = E\overline{\mathring{\eta}_k(t)}\mathring{\eta}_l(t+\tau)$. Якщо $c_{kl} = 0$, $\forall k \neq 0$ і $\forall l \neq 0$, тоді $s(t)$ є сумою двох періодичних функцій:

$$s(t) = \sum_{k \in Z} c_{k0} e^{ik\frac{2\pi}{P_1}t} + \sum_{l \in Z} c_{0l} e^{il\frac{2\pi}{P_2}t}.$$

2. Якщо покласти $\xi_{kl}(t) = c_{kl}\eta(t)$, де $\eta(t)$ – стаціонарний випадковий процес, то отримаємо мультиплікативну модель модуляції:

$$\xi(t) = \eta(t) \sum_{k,l \in Z} c_{kl} e^{i\lambda_{kl} t} = \eta(t) s(t). \qquad (5)$$

Математичне сподівання процесу (5) і його кореляційна функція:

$$R(t,\tau) = R\eta(t)s(t)s(t+\tau),$$

де $R_\eta(\tau) = E\mathring{\eta}(t)\mathring{\eta}(t+\tau)$, що біперіодично змінюється в часі.

3. Для випадку $\xi_{kl}(t) = c_{kl} + \eta_{k0}(t) + \eta_{0l}(t)$, де $\eta_{k0}(t)$ і $\eta_{0l}(t)$ – взаємостаціонарні випадкові процеси, ми приходимо до адитивної моделі у вигляді суми біперіодичної функції та двох ПКВП з періодами P_1 та P_2:

$$\xi(t) = s(t) + \sum_{k \in Z} \xi_{k0}(t) e^{ik\frac{2\pi}{P_1}t} + \sum_{l \in Z} \xi_{0l}(t) e^{il\frac{2\pi}{P_2}t} = s(t) + \xi_1(t) + \xi_2(t).$$

4. Для $\xi_{kl}(t) = c_{k0}\xi_{0l}(t)$ отримуємо модель амплітудної модуляції детермінованої несучої за допомогою ПКВП:

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} c_{k0} e^{ik\frac{2\pi}{P_1}t} \sum_{l \in Z} \xi_{0l}(t) e^{il\frac{2\pi}{P_2}t}.$$

У випадку $\xi_{kl}(t) = \xi_{k0}(t)\xi_{0l}(t)$ отримаємо модель у вигляді добутку двох ПКВП з різними періодами P_1 та P_2:

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \xi_{k0}(t) e^{ik\frac{2\pi}{P_1}t} \sum_{l \in Z} \xi_{0l}(t) e^{il\frac{2\pi}{P_2}t} = \xi_1(t)\xi_2(t).$$

Якщо стаціонарні випадкові процеси $\xi_l(t)$ є взаємо некорельованими, то маємо добуток стаціонарного випадкового процесу:

$$\eta(t) = \sum_{l \in Z} \xi_l(t) e^{il\frac{2\pi}{P_2}t}$$

та ПКВП $\xi(t) = \eta(t)\xi_1(t)$.

5. Квадратурну модель або модель у представленні Райса отримаємо у випадку, коли $\xi_{kl}(t) = 0$, $\forall k,l \neq -1,1$. Припустимо, що:

$$\xi_{1,1}(t) = \frac{1}{2}\left[\xi_{1,1}^c(t) - i\xi_{1,1}^s(t)\right],$$

$$\xi_{1,-1}(t) = \frac{1}{2}\left[\xi_{1,-1}^c(t) - i\xi_{1,1}^s(t)\right],$$

$$\xi_{-1,-1}(t) = \overline{\xi_{1,1}}(t),\ \xi_{-1,1}(t) = \overline{\xi_{1,-1}}(t).$$

Тоді:

$$\begin{aligned}\xi(t) = {} & \xi_{1,1}^c(t)\cos\left(2\pi\left(f_1+f_2\right)t\right) + \\ & +\xi_{1,1}^s(t)\sin\left(2\pi\left(f_1+f_2\right)t\right) + \\ & +\xi_{1,-1}^c(t)\cos\left(2\pi\left(f_1-f_2\right)t\right) + \\ & +\xi_{1,-1}^s(t)\sin\left(2\pi\left(f_1-f_2\right)t\right).\end{aligned} \qquad (6)$$

Введемо випадкові процеси:

$$\begin{aligned}\xi_c(t) = {} & \left[\xi_{1,1}^c(t) + \xi_{1,-1}^c(t)\right]\cos\left(2\pi f_1 t\right) + \\ & +\left[\xi_{1,1}^s(t) - \xi_{1,-1}^s(t)\right]\sin\left(2\pi f_1 t\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_s(t) = {} & \left[\xi_{1,1}^s(t) + \xi_{1,-1}^s(t)\right]\cos\left(2\pi f_2 t\right) + \\ & +\left[\xi_{1,1}^c(t) - \xi_{1,-1}^c(t)\right]\sin\left(2\pi f_2 t\right),\end{aligned}$$

і перепишемо (6) у вигляді:

$$\xi(t) = \xi_c(t)\cos(2\pi f_1 t) + \xi_s(t)\sin(2\pi f_1 t).$$

Квадратурні компоненти у представленні Райса є взаємними ПКВП. Порівняємо представлення БПКВП (4) і окремі випадки, наведені вище, з розглянутими моделями коливань зубчастої пари. Було зазначено, що детермінована частина вібрації містить гармоніки частоти зачеплення та кратних їй частот, лінійних комбінацій частот обертання та лінійної комбінації кожної частоти обертання та частоти зачеплення. Оскільки $f_m = rf_1 = nf_2$, то всі ці частоти належать множині $\{kf_1 + lf_2 : k,l \in Z\}$. Коефіцієнти Фур'є математичного сподівання БПКВП, які описують детерміновану частину вібрації, визначають комплексну амплітуду відповідних гармонік. Коефіцієнти m_{l0} і m_{0n} є амплітудами гармонік для адитивних складових $s_1(t)$ і $s_2(t)$ з періодами P_1 і P_2:

$$s_1(t) = \sum_{k \in Z} m_{k0} e^{ik\frac{2\pi}{P_1}},\ s_2(t) = \sum_{l \in Z} m_{0l} e^{il\frac{2\pi}{P_2}},$$

причому $m_{lk,0}$ – сума амплітуд для r-ї гармоніки зачеплення, (rk)-ї амплітуди гармоніки обертання вхідного колеса та (nl)-ї амплітуди гармоніки обертання вихідного колеса. Зазначимо, що сума $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ має спільний період $P = rP_1 = nP_2$ і її також можна представити у вигляді ряду Фур'є. Проте гармоніки цього ряду мають лише формальну математичну інтерпретацію. Частоти деяких з них, як випливає з $kf = k/(rP_1) = k/(rP_2)$, можуть співпадати з частотами обертання лише в тому випадку, коли відношення між k/r і k/n є натуральними числами. Модуляційні ж взаємодії детермінованих компонентів визначаються амплітудами m_{lk}.

Виходячи з викладеного вище, слід представити математичне сподівання та кореляційну функцію вібросигналу зубчастої пари у вигляді загальних рядів виду:

$$m(t) = E\xi(t) = \sum_{k,l\in Z} m_{kl} e^{i\Lambda_{kl}t} . \qquad (7)$$

$$R(t,\tau) = \sum_{k,l\in Z} R_{kl}(\tau) e^{i\Lambda_{kl}t} , \qquad (8)$$

причому $m_{lk} = E\xi_{kl}(t)$, $R(t,\tau) = E\mathring{\xi}(t)\mathring{\xi}(t+\tau)$, $\mathring{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$, кореляційні компоненти $R_{lk}(\tau)$ можна записати у вигляді наступного ряду:

$$R_{kl}(\tau) = \sum_{p,q\in Z} r_{p-k,q-l,p,q} e^{i\Lambda_{pq}\tau} ,$$

де $r_{pqkl}(\tau) = E\overline{\mathring{\xi}_{pq}(t)}\mathring{\xi}_{kl}(t+\tau), \mathring{\xi}_{pq}(t) = \xi_{pq}(t) - m_{pq}$ – взаємокореляційні функції модулюючих процесів (символ «¯» означає комплексне спряження), що характеризують модуляційні кореляційні взаємодії. Ряди (7) і (8) можна визначити, якщо дані сигналів, виміряні на конкретній системі зубчастих коліс, проаналізувати за допомогою відповідних методів обробки, розроблених на основі загальної моделі (4). Очевидно, що ці результати аналізу можуть бути використані для перевірки конкретних випадків, описаних вище.

Математичне сподівання та кореляційну функцію БПКВП можна обчислювати на основі експериментальних даних за допомогою когерентного (синхронного) усереднення, компонентним методом, а також методом НК. Застосовуючи синхронне усереднення, ми можемо відокремити та аналізувати лише детерміновані чи стохастичні компоненти одного з двох періодів. Когерентні методи в багатьох випадках також не можуть бути використані для обробки вхідних даних, оскільки нестаціонарні періоди, як правило, не є цілими числами, а отже тоді потрібна інтерполяція даних. Тому для обробки даних доцільно використовувати компонентні методи та метод НК, оскільки вони не потребують процедур інтерполяції даних.

Компонентна оцінка та оцінка методом НК формуються як тригонометричні поліноми, коефіцієнти яких обчислюються на основі перетворень Фур'є, представлених у вигляді інтегральних сум. Значення періоду в цих перетвореннях можуть бути довільними. Необхідно лише правильно задати інтервал вибірки, щоб уникнути помилок накладення частот (елайзингу).

Виявлення несправностей шляхом оцінювання характеристик БПКВП. Обчислення всіх параметрів, що характеризують структуру адитивної та мультиплікативної складових математичного сподівання та кореляційної функції БПКВП, може бути відносно трудомістким, особливо у випадку, коли значення одного з періодів суттєво перевищує інший. Подібна ситуація виникає і тоді, коли задачу виявлення несправності можна вирішити на основі меншої кількості параметрів. Розглянемо випадок, коли ми можемо спростити цю задачу до аналізу оцінок ПКВП.

Вище було зазначено, що спектральний склад БПКВП визначається нульовою спектральною складовою:

$$f_{00}(\omega) = \sum_{p,q\in Z} f_{pq}(\omega - \lambda_{pq}) .$$

Припустимо, що $\lambda_{10} \geq s\lambda_{01}$, де s – деяке натуральне число. Пропускаючи сигнал БПКВП через лінійний фільтр з передавальною функцією вигляду:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in \left[\lambda_{0L_1^{(2)}}, 1.9\omega_m\right], \\ 0, \omega \notin \left[\lambda_{0L_1^{(2)}}, 1.9\omega_m\right], \end{cases}$$

виключаємо зі спектру гармоніки з однією з частот обертання та гармоніки частоти зачеплення. Припустимо також, що лише один із зубів колісної шестерні несправний і потужність стохастичної модуляції гармонік зубів шестерні незначна. Беручи до уваги викладене вище та ці припущення, можна провести аналіз відфільтрованого сигналу в рамках моделі ПКВП:

$$\xi_1(t) = \sum_{k\in Z} \xi_{k0}(t) e^{ik\frac{2\pi}{P_1}t} . \qquad (9)$$

Математичне сподівання та кореляційна функція процесу (9) представляються у вигляді ряду Фур'є:

$$m(t) = \sum_{k\in Z} m_k e^{i\lambda_{k0}t} =$$
$$= m_0 + \sum_{k\in N}\left[m_k^c \cos k\lambda_{k0}t + m_k^s \sin k\lambda_{k0}t\right], \qquad (10)$$

$$R(t,\tau) = \sum_{k\in Z} R_k(\tau) e^{i\lambda_{k0}t} =$$
$$= R_0(\tau) + \sum_{k\in N}\left[R_k^c(\tau)\cos k\lambda_{k0}t + R_k^s(\tau)\sin k\lambda_{k0}t\right], \qquad (11)$$

де $m_k = E\xi_{k0}(t)$, $R_k(\tau) = \sum_{p\in Z} r_{p-k,p}(\tau) e^{i\lambda_{p0}\tau}$,

$$r_{pq}(\tau) = E\overline{\mathring{\xi}}_{q0}(t)\xi_{p0}(t+\tau) \qquad (12)$$

і $m_k = 0,5\left(m_k^c - im_k^s\right)$, $R_k\left(\tau\right) = \left[R_k^c\left(\tau\right) - iR_k^s\left(\tau\right)\right]$.

Для моделювання реальних даних треба припускати, що ряди Фур'є (9)–(11) є скінченими. Порядок же найвищої гармоніки можна отримати на основі попередньої обробки даних.

З (12) випливає, що нульова кореляційна складова визначається сумою автокореляційних функцій модулюючих процесів $\xi_{k0}(t)$. Таким чином, усереднена за часом потужність сигналу $R_0(0)$ дорівнює сумі потужностей модуляцій $r_{pp}(0)$:

$$R_0\left(0\right) = \sum_{p=-L_1}^{L_1} r_{pp}\left(0\right).$$

Ненульові компоненти $R_k(\tau)$ характеризують сумарні взаємокореляції модулюючих процесів, номери яких відрізняються на k. Отже, отримуємо кореляції спектральних складових, частоти яких зміщені на величини λ_{ko}. Ці кореляції описуються спектральними компонентами:

$$f_k\left(\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_k\left(\tau\right)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

Значення кореляційних компонентів у точці $\tau = 0$ є їхніми повними характеристиками у часовій області:

$$R_k\left(0\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k\left(\omega\right)d\omega.$$

Методологія обробки вібраційних сигналів, розвинута у наших роботах [6, 12, 19], має свої характерні особливості. Вона передбачає послідовне використання методів кореляційного та спектрального аналізу стаціонарних випадкових процесів, методів пошуку прихованих періодичностей першого та другого порядку [6, 18], їх розділення та індивідуального аналізу, емпіричного гармонічного аналізу на основі рядів Фур'є та перетворення Фур'є, методів кореляційного та спектрального аналізу ПКВП [3, 5, 6]. Гармонійне представлення ПКВП використовується для вдосконалення розроблених методів і для інтерпретації результатів обробки. Коротко розглянемо основні етапи кореляційного аналізу ПКВП.

Стаціонарний аналіз. Для дослідження загальних властивостей вібраційних сигналів на початковому етапі розраховуються оцінки кореляційної функції та спектральної густини потужності ПКВП у стаціонарному наближенні:

$$\hat{R}\left(jh\right) = \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\left[\xi\left(nh\right) - \hat{m}\right]\left[\xi\left(\left(n+j\right)h\right) - \hat{m}\right],$$

$$\hat{m} = \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\xi\left(nh\right),$$

$$\hat{f}\left(\omega\right) = \frac{h}{2\pi}\sum_{n=-L}^{L} k\left(nh\right)\hat{R}\left(nh\right)\cos\omega nh.$$

Тут $h = T/K$ – інтервал дискретизації; j – ціле число; T – довжина реалізації сигналу; K – розмір вибірки; $L = \tau_m/h$ – деяке натуральне число; τ_m – точка усічення корелограми; $k(nh)$ – кореляційне вікно. Аналіз результатів обчислення дозволяє виявити наявність детермінованої складової, визначити співвідношення потужностей детермінованих і стохастичних коливань для уточнення спектрального складу відібраного сигналу.

Виявлення та аналіз прихованих періодичностей першого порядку. Оцінка спектральної густини потужності, як правило, містить безперервну та дискретну складові, причому останні зумовлені лише детермінованими коливаннями. Для оцінки періоду цих коливань можна застосувати когерентний, компонентний та метод НК [6, 12, 19]. Значення невідомого періоду, за винятком рідкісних випадків, не є кратними інтервалу дискретизації, тому для використання когерентного методу необхідна інтерполяція відібраних експериментальних даних, що спричиняє додаткову похибку обробки. Недоліком цього підходу також є залежність результатів обробки від початкової точки початку обробки сигналу. Через це рекомендується використовувати компонентний метод для виявлення періодичності та для оцінки періодів.

Статистика для визначення періоду методом МНК має вигляд:

$$F_1\left(\theta\right) = \frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}\hat{m}^2\left(\theta, nh\right), \tag{13}$$

де

$$\hat{m}\left(\theta, nh\right) = \sum_{k=1}^{L_1}\left[\hat{m}_k^c\left(\theta\right)\cos k\frac{2\pi}{\theta}nh + \hat{m}_k^s\left(\theta\right)\sin k\frac{2\pi}{\theta}nh\right], \tag{14}$$

$$\begin{Bmatrix}\hat{m}_k^c\left(\theta\right)\\ \hat{m}_k^s\left(\theta\right)\end{Bmatrix} = \frac{2}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}\xi\left(nh\right)\begin{Bmatrix}\cos k\frac{2\pi}{\theta}nh\\ \sin k\frac{2\pi}{\theta}nh\end{Bmatrix}, \tag{15}$$

а θ – пробний період. Похибок, спричинених ефектами елайзингу першого та другого роду, можна уникнути, якщо крок вибірки в (14) та (15) задовольнятиме нерівностям [6]:

$$h \le \frac{P_1}{2L_1+1},\ h \le \frac{P_1}{2L_2+1}, \tag{16}$$

де L_1 і L_2 – номери найвищої гармоніки відповідно математичного сподівання та кореляційної функції. Слід зазначити, що значення пробного періоду θ в (13) і (14) можуть бути довільними і не залежать від кроку дискретизації сигналу h.

Максимальні значення (15) є близькими до амплітуд окремих гармонік математичного сподівання. Ефективність МНК оцінки періоду (13) вища, ніж ефективність компонентної оцінки (15), оскільки при обробці даних враховуються всі гармоніки амплітудного спектру. Функціонал (14) у точці максимуму $\theta = \hat{P}_1$ досягає значення, близького до усередненої за часом потужності детермінованих коливань:

$$Q_d = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{L}\left[\left[\hat{m}_k^c\left(\hat{P}_1\right)\right]^2 + \left[\hat{m}_k^s\left(\hat{P}_1\right)\right]^2\right].$$

Ця величина може значно перевищувати амплітуди окремих гармонік. Тому для детектування малопотужних коливань доцільно використовувати функціонал (13).

Маючи значення оцінки періоду, можна сформувати компонентну оцінку [6, 19] математичного сподівання:

$$\hat{m}(t) = \hat{m}_0 + \sum_{k=1}^{L_1}\left[\hat{m}_k^c\left(\hat{P}_1\right)\cos k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}t + \hat{m}_k^s \sin k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}t\right] \quad (17)$$

де $\hat{m}_0 = \hat{m}$. Якщо виконуються умови (16), то співвідношення (17) визначає математичне сподівання для всіх $t \in \left[0, \hat{P}_1\right]$.

Для оцінок амплітудного та фазового спектру детермінованих коливань маємо:

$$\hat{A}\left(k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}\right) = \sqrt{\left[m_k^c\left(\hat{P}_1\right)\right]^2 + \left[m_k^s\left(\hat{P}_1\right)\right]^2},$$

$$\hat{\varphi}\left(k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}\right) = arctg\frac{m_k^s\left(\hat{P}_1\right)}{m_k^c\left(\hat{P}_1\right)},\ k = \overline{1, L_1}.$$

Можна припустити, що амплітуди деяких гармонік збільшуються в міру розвитку несправності зубчастої передачі. Тому для кількісної оцінки стану зубчастої передачі можна використовувати суму амплітуд:

$$\hat{A}_\Sigma = \sum_{k=1}^{L_1}\hat{A}\left(k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}\right)$$

або суму потужностей гармонік:

$$\hat{Q}_d = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_1}\hat{A}^2\left(k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}\right).$$

Зміну стану зубчастої передачі можна проаналізувати за допомогою показників, що визначаються співвідношеннями величин:

$$I_1 = \frac{\hat{A}_\Sigma^{(c)}}{\hat{A}_\Sigma^{(i)}},\ I_2 = \frac{\hat{Q}_d^{(c)}}{\hat{Q}_d^{(i)}}$$

розрахованих для початкового (і) та поточного (с) станів.

Аналіз прихованих періодичностей другого порядку. Для виявлення прихованих періодичностей другого порядку необхідно застосувати формулу, подібну до (13). Функціонал для визначення періоду кореляційної функції методом НК має вигляд:

$$\hat{F}_2(jh,\theta) = \frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}\hat{R}^2(nh, jh,\theta), \quad (18)$$

де

$$\hat{R}(nh, jh,\theta) = \sum_{k=1}^{L_2}\left[\hat{R}_k^c(jh,\theta)\cos k\frac{2\pi}{\theta}nh + \hat{R}_k^s(jh,\theta)\sin k\frac{2\pi}{\theta}nh\right],$$

$$\left\{\begin{matrix}\hat{R}_k^c(jh,\theta)\\ \hat{R}_k^s(jh,\theta)\end{matrix}\right\} = \frac{2}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}\left[\xi(nh) - \hat{m}(nh)\right]\times$$

$$\left[\xi((n+j)h) - \hat{m}((n+j)h)\right]\left\{\begin{matrix}\cos k\dfrac{2\pi}{\theta}nh\\ \sin k\dfrac{2\pi}{\theta}nh\end{matrix}\right\}.$$

Оцінка періоду кореляційної функції знаходиться як точка максимуму статистики (18) залежно від величини пробного періоду θ. Ефекти накладання першого та другого роду будуть відсутні, якщо крок вибірки сигналу задовольнятиме нерівності:

$$h \le \frac{P_1}{4L_2 + 1}. \quad (19)$$

У точці $\theta = \hat{P}_1$ величина (18) є близькою до середнього значення часових змін потужності кореляційної функції зі зсувом $\tau = jh$ і тому:

$$F_2\left(jh, \hat{P}_1\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_2}\left[\left[R_k^c\left(jh, \hat{P}_1\right)\right]^2 + \left[R_k^s\left(jh, \hat{P}_1\right)\right]^2\right].$$

Для обчислення кореляційної функції необхідно використати наступну статистику:

$$\hat{R}\left(t, jh, \hat{P}_1\right) = \hat{R}_0(jh) + \sum_{k=1}^{L_2}\left[R_k^c\left(jh, \hat{P}_1\right)\cos k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}t + R_k^s\left(jh, \hat{P}_1\right)\sin k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}t\right]. \quad (20)$$

Тут

$$\hat{R}_0(jh) = \frac{1}{2K+1}\times \sum_{n=-K}^{K}\left[\xi(nh) - \hat{m}(nh)\right]\left[\xi((n+j)h) - \hat{m}((n+j)h)\right].$$

Якщо задовольняється умова (19), то вираз (20) є інтерполяційною формулою, яка дозволяє розрахувати значення кореляційної функції для всіх $t \in \left[0, \hat{P}_1\right]$ [19].

Оцінка дисперсії $\hat{R}\left(t, 0, \hat{P}_1\right)$ визначає часові зміни потужності стохастичної складової вібрації та оцінку нульової кореляційної компоненти $\hat{R}_0(0)$ в точці $j = 0$, яка є усередненою у часі величиною цієї потужності. Величини

$$\hat{V}\left(k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}\right)=\sqrt{\left[R_k^c\left(0,\hat{P}_1\right)\right]^2+\left[R_k^s\left(0,\hat{P}_1\right)\right]^2},$$

$$\psi\left(k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}\right)=arctg\frac{R_k^s\left(0,\hat{P}_1\right)}{R_k^c\left(0,\hat{P}_1\right)}$$

можна розглядати відповідно як амплітудний та фазовий спектри змін потужності в часі.

З проведених досліджень [7–13, 19] відомо, що вібраційний сигнал, який генерується обертовою машиною, набуває властивостей періодичної нестаціонарності другого порядку з моменту виникнення несправності. Це означає, що часові зміни дисперсії та кореляційної функції є тестовою ознакою для виявлення пошкодження машини. Таким чином, показники, сформовані на основі кореляційних компонентів, є чутливими до появи несправності. Один з таких показників заданий відношенням сумарної амплітуди гармонік дисперсії та нульової кореляційної складової:

$$I_3=\frac{\sum_{k=1}^{L_2}\hat{V}\left(k\frac{2\pi}{\hat{P}_1}\right)}{\hat{R}_0\left(0\right)}.$$

Прискорене наростання величини цього показника є свідченням швидкого погіршення якості механізму.

Якщо при визначенні пошкодження механізму враховувати відношення поточного значення нульової кореляційної складової до його початкового значення, тоді можна сформувати наступний індикатор:

$$I_4=\frac{\Delta\hat{R}_0\left(0\right)+\sum_{k=1}^{L_2}\hat{V}\left(k\hat{f}_0\right)}{\hat{R}_0^{(i)}\left(0\right)},$$

де $\Delta\hat{R}_0\left(0\right)=\hat{R}_0^c\left(0\right)-\hat{R}_0^{(i)}\left(0\right)$. Суттєвий приріст величини індикатора I_4 свідчить про його високу чутливість до зміни стану зубчастої пари.

Індикатори для виявлення несправностей, сформовані на основі амплітудних спектрів математичного сподівання та часових змін дисперсії, запропоновано також в інших працях [7, 20]. Вони мають форму так званих індикаторів циклостаціонарності. Проте їх застосування передбачає, що значення циклічної частоти наперед точно відомі, тоді як відповідні амплітуди розраховуються на основі експериментальних даних. Їх величини визначаються виходячи із заданих технічних параметрів агрегатів обертових машин. Проте, оскільки ці параметри змінюються під час роботи машини, вибране значення частоти може відрізнятися від реального значення. У цьому випадку результати обробки можуть бути істотно спотворені. Тому оцінка циклічних частот на основі відібраного вібраційного сигналу зубчастих передач є важливим питанням практичного аналізу вібрації і її детально буде розглянуто у другій (практичній) частині даної роботи.

Висновки

У роботі запропоновано модель вібрацій пошкодженої зубчастої пари у вигляді БПКВП, яка є ефективною для діагностування обертових механізмів, що містять зубчасті передачі. Модуляційна взаємодія детермінованих коливань двох коліс характеризується математичним сподіванням БПКВП, а взаємодія стохастичних коливань – кореляційною функцією БПКВП. Ряди Фур'є математичного сподівання та кореляційної функції складаються з гармонік частот обертання коліс, їх кратних і комбінацій. Гармоніки частот зачеплення є окремими гармоніками БПКВП представлення сигналу. Конкретний склад гармонік детермінованих і стохастичних коливань залежать від ступеня розвитку несправності та місця її розташування.

Показано, що виходячи з представлення БПКВП стохастичними рядами, випливають простіші часткові випадки, які представлено у вигляді сум та добутків стаціонарних випадкових процесів і детермінованої біперіодичної функції, стаціонарного випадкового процесу та ПКВП, двох ПКВП з різними періодами нестаціонарності та ін. Деякі з цих окремих моделей використовуються в літературі для аналізу вібрації та розглянуті нами у статті.

Список літератури/References

1. Gardner, W.A. (1994) *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing;* IEEE Press, New York.
2. Napolitano, A. (2012) *Generalizations of Cyclostationary Signal Processing: Spectral Analysis and Applications*; IEEE Press.
3. Napolitano, A. *(2020) Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations;* Elsevier, Academic Press.
4. Gladyshev, E.G. (1963) Periodically and Almost-Periodically Correlated Random Processes with a Continuous Time Parameter. *Theory Prob. Appl.* **8**, 173–177.
5. Hurd, H.L., Miamee, A. (2007) *Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice;* Wiley, New York.
6. Яворський І.М. (2013) *Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань*. Львів, Фізико-механічний інститут НАН України ім. Г.В. Карпенка. Javorskyj, I. (2013) *Mathematical models and analysis of stochastic oscillations*. G.V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of NASU, Lviv [in Ukrainian].
7. Capdessus, C., Sidahmed, M., Lacoume, J.L. (2000) Cyclostationary processes: Application in gear fault early diagnostics. *Mech. Syst. Signal Process*, **14**(3), 371–385.
8. Antoni, J., Bonnardot, F., Raad, A., El Badaoui, M. (2004) Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals. *Mech. Syst. Signal Process*, **18**, 1285–1314.
9. Antoni, J. (2009) Cyclostationarity by examples. *Mech. Syst. Signal Process.*, **23**, 987–1036.
10. Randall, R.B., Antoni, J. (2011) Rolling element bearing diagnostics – A tutorial. *Mech. Syst. Signal Process.*, **25**(2), 485–520.
11. Zimroz, R., Bartelmus, W. (2009) Gearbox condition estimation using cyclostationary properties of vibration signal. *Key Engineering Mater.*, **413**(1), 471–478.

12. Javorskyj, I., Kravets, I., Matsko, I., Yuzefovych, R. (2017) Periodically correlated random processes: application in early diagnostics of mechanical systems. *Mech. Syst. Signal Process.*, **83**, 406–438.
13. Zhu, Z.K., Feng, Z.H., Kong, F.R. (2005) Cyclostationarity analysis for gearbox condition monitoring: Approaches and effectiveness. *Mech. Syst. Signal Process.*, **19**(3), 467–482.
14. Mark, W.D. (1978) Analysis of the vibratory excitation of gear systems: basic theory. *J. Acoustical Soc. America*, **63**(5), 1409–1430.
15. McFadden, P.D. (1987) Examination of a technique for the early detection of failure in gears by signal processing of the time domain average of the meshing vibration. *Mech. Syst. Signal Process.*, **1**(2), 173–183.
16. Dalpiaz, G., Rivola, A., Rubini, R. (2000) Effectiveness and sensitivity of vibration processing techniques for local fault detection in gears. *Ibid*, **14**(3), 387–412.
17. Antoni, J., Randall, R.B. (2002) Differential diagnosis of gear and bearing faults. *J. Vib. Acoust.*, **124**(2), 165–171.
18. Javorskyj, I., Dzeryn, O., Yuzefovych, R. (2019) Analysis of mean function discrete LSM-estimator for biperiodically nonstationary random signals. *Math. Model. Comput.*, **6**(1), 44–57.
19. Matsko, I., Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Zakrzewski, Z. (2018) Forced oscillations of cracked beam under the stochastic cyclic loading. *Mech. Syst. Signal Process.*, **104**, 242–263.
20. Raad, A., Antoni, J., Sidahmed, M. (2008) Indicators of cyclostationarity: Theory and application to gear fault monitoring. *Ibid*, **22**, 574–587.

DIAGNOSTICS OF GEAR PAIR DAMAGE USING THE METHODS OF BI-PERIODICALLY CORRELATED RANDOM PROCESSES.
Part 1. Theoretical aspects of the problem

I.M. Javorskyj[1,2], R.M. Yuzefovych[1,3], O.V. Lychak[1], R.T. Slyepko[1], M.Z. Varyvoda[1], P.O. Semenov[4]

[1]G.V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of NASU. 5 Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine.
E-mail: roman.yuzefovych@gmail.com
[2]Bydgoszcz University of Sciences and Technology. 7 Prof. S. Kaliskiego al., 85796, Bydgoszcz, Poland.
[3]Lviv Polytechnic National University. 12 S. Bandery str., Lviv, 79013, Ukraine.
[4]Odessa National Maritime University. 34 I. Mechnikova str., 65029, Odesa, Ukraine.

A model of the vibration of a gear pair in the form of bi-periodically correlated random processes (BPCRP) describing its stochastic repeatability with two different periods is proposed and analyzed. It is shown that the models, proposed before in the literature can be considered as partial cases of BPCRP. It is noted, that in the case of damage of one of the gears, the diagnostics of the mechanism can be carried out within the framework of the BPCRP, approximated to periodically correlated random processes (PCRP). The first stage in the proposed approach is the estimation of the period of non-stationarity (fundamental frequency) of the first and second order moment functions. Least squares (LS) estimates of the periods of the deterministic part of the vibration signal and the power of its stochastic part were obtained. The amplitude spectra of deterministic oscillations and variation of stochastic oscillations for different degrees of damage to the gear pair were analyzed. Effective indicators of the degree of development of gear pair damage, which are formed on the basis of sums of the amplitudes of the components of the spectrum of the deterministic vibration component are proposed. Ref. 20.

Keywords: diagnostics, bi-periodic correlated random processes, periodical nonstationarity, deterministic oscillations, amplitude spectrum, stochastic high-frequency modulation

Надійшла до редакції 21.10.2022