

ВИДІЛЕННЯ ТА АНАЛІЗ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДОВОЇ ВІБРАЦІЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Р.М. Юзефович^{1,2}, І.М. Яворський^{1,3}, О.В. Личак¹, В.В. Гнатишин², М.З. Варивода¹

¹Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України. 79060, м. Львів, вул. Наукова, 5.

E-mail: roman.yuzefovych@gmail.com

²Національний університет «Львівська політехніка». 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12

³Бидгощська Політехніка. 85796, Польша, м. Бидгощ, алея проф. С. Каліського, 7

Розглянуто результати досліджень властивостей оцінки методом найменших квадратів математичного сподівання періодично нестационарних випадкових процесів як математичної моделі стохастичних вібрацій. Проведено аналіз залежностей, що визначають статистичні характеристики оцінки. Наведено приклади аналізу типових процесів. Бібліогр. 20, рис. 2.

Ключові слова: періодично корельовані випадкові процеси (ПКВП), вібрація, математичне сподівання, кореляційна функція, оцінка методом найменших квадратів, дисперсія

Вступ. Для ефективного дослідження властивостей механічних і фізичних систем з використанням експериментальних даних потрібно, насамперед, виявити, проаналізувати та використати ті їх характерні особливості, що дадуть змогу в повній мірі розв'язати поставлені задачі. Такі особливості визначаються шляхом використання відповідних методів аналізу й обробки даних. Останні можуть бути розроблені тільки на основі обґрунтованих математичних моделей досліджуваних процесів. Вдало вибрані математичні подання реалізацій процесів, що досліджуються, створюють підґрунтя для опису і розуміння їх невідомих властивостей. Адекватною моделлю вібрацій пошкоджених механізмів, котрим властиві риси повторюваності та стохастичності, є періодично корельовані випадкові процеси (ПКВП) [1, 2]. При появі розподілених чи локалізованих дефектів несучі гармоніки вібрацій стохастично модулюються як за амплітудою, так і за фазою. Властивості такої модуляції описуються математичним сподіванням і кореляційною функцією ПКВП, а також їх коефіцієнтами Фур'є.

Підхід до аналізу вібрацій, який ґрунтується на ПКВП-моделях, був вперше нами апробований при аналізі стану підшипникових опор турбоагрегатів [3] і показав свою ефективність. Даючи змогу з єдиних позицій описати повторюваність і стохастичність, характеристики ПКВП є носіями інформації про незнані досі їх властивості і можуть бути покладені в основу формування нових ознак для опису стану об'єктів, що їх породжують.

Подальші дослідження [4, 5] показали, що ці ознаки можуть використовуватись для виявлення

дефектів на ранніх стадіях розвитку. В останні роки ПКВП-підхід до аналізу нестационарних вібраційних сигналів і розв'язування на цій основі задач діагностики розвивається багатьма вченими [6–13]. В англійській літературі, як правило, розвивається методологія, що ґрунтується на результатах W. Gardner [14, 15], H. Hurd [16], D. Dehay [17], J. Antoni [18, 19]. Такі нестационарні випадкові процеси називають циклостационарними [6, 7, 9–11]. Однак повноцінне використання ПКВП-моделі до аналізу вібраційних сигналів стало можливим після розв'язання задачі про визначення періоду нестационарності [20], яка є узагальненням на випадок ПКВП задачі про виявлення прихованих періодичностей. Знання періоду нестационарності дає можливість обчислити на основі експериментальних даних весь комплекс характеристик першого й другого порядку – математичне сподівання, кореляційну функцію, спектральну густину, а також їх коефіцієнти Фур'є.

Важливим завданням при обчисленні цих характеристик вібраційних сигналів за експериментальними даними є оцінка вірогідності отриманих результатів. На точність оцінок характеристик, які описують структуру стохастичної повторюваності сигналів і на основі яких отримуються ознаки для виявлення дефектів механізмів, впливають параметри обробки, а саме: довжина відрізка реалізації, який обробляється, крок дискретизації і точка усереднення корелограми. Аналіз точності оцінок залежно від параметрів обробки може бути проведений при переході до параметричного опису імовірнісної структури сигналів. З однієї сторони, у цьому випадку можуть бути отримані конкретні числові результати, з іншої – виходячи з потрібної точності

Юзефович Р.М. – <https://orcid.org/0000-0001-5546-453X>, Яворський І.М. – <https://orcid.org/0000-0003-0243-6652>,

Личак О.В. – <https://orcid.org/0000-0001-5559-1969>

Р.М. Юзефович, І.М. Яворський, О.В. Личак, В.В. Гнатишин, М.З. Варивода, 2023

оцінювання можуть бути вибрані саме ті параметри обробки, які її забезпечать. Аналізу порівняння точності оцінок, отриманих за допомогою методу найменших квадратів та компонентних оцінок, від вибору параметрів обробки присвячена ця стаття.

Властивості оцінок методу найменших квадратів. Математичне сподівання ПКВП $m(t) = E\xi(t)$, де E – оператор усереднення за густиною імовірності, і кореляційна функція $b(t,u) = E\dot{\xi}(t)\dot{\xi}(t+u)$, $\xi(t) = \xi(t) - m(t)$, є періодичними функціями часу t і тому можуть бути подані у вигляді рядів Фур’є:

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik\omega_0 t}, \quad b(t,u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

де T – період. Метою кореляційного статистичного аналізу є оцінювання за експериментальними даними функцій $m(t)$ і $b(t,u)$. Для такого оцінювання використовують когерентний [7] і компонентний [8] методи. Компонентні оцінки визначаються через оцінки коефіцієнтів Фур’є відповідних характеристик. Для визначення останніх може бути використаний метод найменших квадратів.

Даний метод полягає у знаходженні таких значень цих величин, при яких мінімальними стають середньоквадратичні відхилення оцінок:

$$F_1(\hat{m}_0, \hat{m}_1^c, \dots, \hat{m}_{N_1}^c, \hat{m}_1^s, \dots, \hat{m}_{N_2}^s) = \int_0^\theta [\xi(t) - \hat{m}(t)]^2 dt, \quad (1)$$

$$F_2[\hat{B}_0(u), \hat{B}_1^c(u), \dots, \hat{B}_{N_1}^c(u), \hat{B}_1^s(u), \dots, \hat{B}_{N_2}^s(u)] = \int_0^\theta [\eta(t,u) - \hat{b}(t,u)]^2 dt,$$

при цьому:

$$\eta(t,u) = [\xi(t) - \hat{m}(t)][\xi(t+u) - \hat{m}(t+u)],$$

$$\hat{m}(t) = \hat{m}_0 + \sum_{k=1}^{N_1} (\hat{m}_k^c \cos k\omega_0 t + \hat{m}_k^s \sin k\omega_0 t), \quad (2)$$

$$\hat{b}(t,u) = \hat{B}_0(u) + \sum_{k=1}^{N_2} [\hat{B}_k^c(u) \cos k\omega_0 t + \hat{B}_k^s(u) \sin k\omega_0 t].$$

Беручи до уваги, що квадратичні форми, побудовані на основі других часткових похідних функціоналів F_1 і F_2 , є достатньо визначеними, точки екстремумів знаходять як розв’язки систем лінійних рівнянь:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \hat{m}_0} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \hat{m}_k^c} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \hat{m}_k^s} = 0, \quad k = \overline{1, N_1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \hat{B}_0(u)} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \hat{B}_l^c(u)} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \hat{B}_l^s(u)} = 0, \quad l = \overline{1, N_2}. \quad (4)$$

Після обчислення похідних система рівнянь (4) набуває вигляду:

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{m}}, \quad (5)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & c_{01} & \dots & c_{0N_1} & a_{01} & \dots & a_{0N_1} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N_1} & a_{11} & \dots & a_{1N_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N_1 0} & c_{N_1 1} & \dots & c_{N_1 N_1} & a_{N_1 1} & \dots & a_{N_1 N_1} \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{N_1 1} & s_{11} & \dots & s_{1N_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{0N_1} & a_{1N_1} & \dots & a_{N_1 N_1} & s_{N_1 1} & \dots & s_{N_1 N_1} \end{bmatrix},$$

де

$$\hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \hat{m}_0 \\ \hat{m}_1^c \\ \vdots \\ \hat{m}_{N_1}^c \\ \hat{m}_1^s \\ \vdots \\ \hat{m}_{N_2}^s \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \bar{m}_0 \\ \bar{m}_1 \\ \vdots \\ \bar{m}_{N_1} \\ \bar{m}_{N_1+1} \\ \vdots \\ \bar{m}_{2N_1} \end{bmatrix},$$

$$c_{lk} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \cos l\omega_0 t \cos k\omega_0 t dt,$$

$$s_{lk} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \sin l\omega_0 t \sin k\omega_0 t dt,$$

$$a_{lk} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \cos k\omega_0 t \sin l\omega_0 t dt,$$

$$\bar{m}_0 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) dt, \quad (6)$$

$$\bar{m}_l = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \cos l\omega_0 t dt, \quad (7)$$

$$\bar{m}_{l+N_1} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \sin l\omega_0 t dt. \quad (8)$$

Розв’язок системи (5) дає оцінки компонентів $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{m}}$. Якщо $\theta = NT$, то $c_{lk} = s_{lk} = a_{lk} = 0, k \neq l$, а $c_{kk} = s_{kk} = 1/2, a_{kk} = 0$.

Граничні значення цих величин отримуємо при $\theta \rightarrow \infty$. У такому випадку матриця \mathbf{M} (5) стає діагональною, а оцінки компонентів визначаються формулами:

$$\hat{m}_0 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) dt,$$

$$\hat{m}_l^c = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \cos l\omega_0 t dt,$$

$$\hat{m}_l^s = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \sin l\omega_0 t dt,$$

тобто співпадають з компонентними [9].

Оскільки обернена матриця $\mathbf{M}^{-1} = \frac{[A_{ik}]^T}{|\mathbf{M}|}$, де $[A_{ik}]^T$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів m_{ik} матриці \mathbf{M} , а $|\mathbf{M}|$ – її визначник, то:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \sum_{l=0}^{2N_1} \bar{m}_l A_{l+1,k+1}. \quad (9)$$

Математичне сподівання оцінки (9) визначається як:

$$E\hat{m}_k = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \sum_{l=0}^{2N_1} E\bar{m}_l A_{l+1,k+1}.$$

Враховуючи співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{2N_1+1} m_{jk} A_{jl} = \begin{cases} |\mathbf{M}|, & k=l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

приходимо до висновку, що оцінки найменших квадратів компонентів m_0 , m_k^c і m_k^s для довільних $\theta \in \text{незміщеними}$: $E\hat{m}_k^c = m_k^c$, $E\hat{m}_k^s = m_k^s$. З незміщеності оцінок \hat{m}_0 , \hat{m}_k^c і \hat{m}_k^s впливає незміщеність оцінки математичного сподівання (2).

Для знаходження дисперсії оцінки математичного сподівання, враховуючи (7), подамо її у вигляді:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \sum_{l=0}^{2N_1} \bar{m}_l f_l(t),$$

де:

$$f_l(t) = A_{l+1,1} + \sum_{k=1}^{N_1} \begin{pmatrix} A_{l+1,K+1} \cos k\omega_0 t + \\ + A_{l+1,K+N_1+1} \sin k\omega_0 t \end{pmatrix} = \sum_{k=-N_1}^{N_1} C_{lk} e^{ik\omega_0 t},$$

при цьому:

$$C_{l0} = A_{l+1,1}, \quad C_{lk} = \frac{1}{2} (A_{l+1,K+1} - iA_{l+1,K+N_1+1}), \\ C_{l,-k} = \bar{C}_{lk}.$$

Тут « $\bar{}$ » – знак спряження. Тоді:

$$D[\hat{m}(t)] = E[m(t) - \hat{m}(t)]^2 = \\ = \frac{1}{|\mathbf{M}|^2} \sum_{l,r=0}^{2N_1} R_{\bar{m}_l \bar{m}_r} f_l(t) f_r(t),$$

де $R_{\bar{m}_l \bar{m}_r}$ – кореляції між випадковими величинами \bar{m}_l і \bar{m}_r : $R_{\bar{m}_l \bar{m}_r} = E(\bar{m}_l - E\bar{m}_l)(\bar{m}_r - E\bar{m}_r)$. При $l=r$ це будуть їх дисперсії: $R_{\bar{m}_l \bar{m}_l} = Dm_l$.

Виходячи із співвідношень (6)–(8), маємо:

$$R_{\bar{m}_l \bar{m}_r} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t,s-t) \begin{Bmatrix} \cos l\omega_0 t & \cos r\omega_0 s \\ \sin l\omega_0 t & \sin r\omega_0 s \end{Bmatrix} dt ds.$$

Величини $R_{\bar{m}_l \bar{m}_r}$ прямують до нуля при $\theta \rightarrow \infty$ і виконується гранична рівність:

$$\lim_{|\theta| \rightarrow \infty} b(t,u) = 0.$$

Остання рівність є достатньою умовою слушності оцінки найменших квадратів математичного сподівання ПКВП.

Оцінки характеристик модульованих сигналів.

Конкретизуємо отримані результати для випадку, коли $\xi(t) = \xi_c(t) \cos w_0 t + \xi_s(t) \sin w_0 t$. Оцінки \hat{m}_c і \hat{m}_s знаходяться як точки мінімуму функціоналу:

$$\hat{F}(\hat{m}_c, \hat{m}_s) = \int_0^\theta (\xi(t) - \hat{m}_c(t) \cos \omega_0 t - \hat{m}_s(t) \sin \omega_0 t)^2 dt,$$

і є розв'язками системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \hat{m}_c c_{11} + \hat{m}_s a_{11} = \bar{m}_1, \\ \hat{m}_c a_{11} + \hat{m}_s s_{11} = \bar{m}_2, \end{cases}$$

де:

$$\bar{m}_1 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \cos \omega_0 t dt, \quad \bar{m}_2 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \sin \omega_0 t dt,$$

тобто:

$$\hat{m}_c = \frac{1}{|\mathbf{M}|} (\bar{m}_1 s_{11} - \bar{m}_2 a_{11}),$$

$$\hat{m}_s = \frac{1}{|\mathbf{M}|} (\bar{m}_2 c_{11} - \bar{m}_1 a_{11}),$$

$$|\mathbf{M}| = c_{11} s_{11} - a_{11}^2.$$

Можна перекоонатися, що ці оцінки є незміщеними для довільних θ , тобто:

$$E\hat{m}_c = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \left[\frac{c_{11}}{\theta} \int_0^\theta [m_c(t) \cos \omega_0 t + m_s(t) \sin \omega_0 t] \cos \omega_0 t dt - \right. \\ \left. - \frac{a_{11}}{\theta} \int_0^\theta [m_c(t) \cos \omega_0 t + m_s(t) \sin \omega_0 t] \sin \omega_0 t dt \right] = \\ = \frac{m_c}{|\mathbf{M}|} (c_{11} s_{11} - a_{11}^2) = m_c,$$

$$E\hat{m}_s = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \left[\frac{c_{11}}{\theta} \int_0^\theta [m_c(t) \cos \omega_0 t + m_s(t) \sin \omega_0 t] \sin \omega_0 t dt - \right. \\ \left. - \frac{a_{11}}{\theta} \int_0^\theta [m_c(t) \cos \omega_0 t + m_s(t) \sin \omega_0 t] \cos \omega_0 t dt \right] = \\ = \frac{m_s}{|\mathbf{M}|} (c_{11} s_{11} - a_{11}^2) = m_s.$$

Оцінку математичного сподівання подамо у вигляді:

$$\hat{m}(t) = \sum_{l=0}^2 \bar{m}_l f_l(t), \quad (10)$$

де:

$$f_l(t) = A_{l1} \cos \omega_0 t + A_{l2} \sin \omega_0 t = \sum_{k=-1}^1 C_{lk} e^{ik\omega_0 t} .$$

Очевидно, що:

$$A_{11} = s_{11}, A_{12} = -a_{11}, A_{21} = -a_{11}, A_{22} = c_{11} .$$

Тоді дисперсія оцінки (10) найменших квадратів:

$$D[\hat{m}(t)] = \gamma_0 + \gamma_2 e^{i2\omega_0 t} + \gamma_{-2} e^{-i2\omega_0 t} = \gamma_0 + \gamma_2^c \cos 2\omega_0 t + \gamma_2^s \sin 2\omega_0 t, \quad (11)$$

де:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{2|\mathbf{M}|^2} \left[(a_{11}^2 + s_{11}^2) D_{\bar{m}_1} - 2a_{11}(c_{11} + s_{11}) R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} + (a_{11}^2 + c_{11}^2) D_{\bar{m}_2} \right], \\ \gamma_2^c &= \frac{1}{2|\mathbf{M}|^2} \left[(s_{11}^2 - a_{11}^2) D_{\bar{m}_1} + 2a_{11}(c_{11} - s_{11}) R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} + (a_{11}^2 - c_{11}^2) D_{\bar{m}_2} \right], \\ \gamma_2^s &= -\frac{1}{|\mathbf{M}|^2} \left[a_{11} s_{11} D_{\bar{m}_1} - (a_{11}^2 + c_{11} s_{11}) R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} + a_{11} c_{11} D_{\bar{m}_2} \right]. \end{aligned}$$

Дисперсія компонентної оцінки:

$$\begin{aligned} \hat{m}(t) &= \left[\frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(s) \cos \omega_0 s ds \right] \cos \omega_0 t + \\ &+ \left[\frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(s) \sin \omega_0 s ds \right] \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

також має вигляд (11), але тепер:

$$\gamma_0 = 2(D_{\bar{m}_1} + D_{\bar{m}_2}), \quad \gamma_2^c = 2(D_{\bar{m}_1} - D_{\bar{m}_2}), \quad \gamma_2^s = 4R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} .$$

Дисперсії випадкових величин \bar{m}_1 і \bar{m}_2 та їх кореляція визначаються співвідношеннями:

$$D_{\bar{m}_1} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 s dt ds ,$$

$$D_{\bar{m}_2} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) \sin \omega_0 t \sin \omega_0 s dt ds ,$$

$$R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 s dt ds .$$

Враховувавши, що:

$$b(t, u) = B_0(u) + B_2^c(u) \cos 2\omega_0 t + B_2^s(u) \sin 2\omega_0 t ,$$

після перетворень у першому наближенні знаходимо:

$$D_{\bar{m}_1} = \frac{1}{2\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) \left[2B_0(u) \cos \omega_0 u + B_2^c(u) \cos \omega_0 u - B_2^s(u) \sin \omega_0 u \right] du ,$$

$$D_{\bar{m}_2} = \frac{1}{2\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) \left[2B_0(u) \cos \omega_0 u - B_2^c(u) \cos \omega_0 u + B_2^s(u) \sin \omega_0 u \right] du ,$$

$$R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} D_{\bar{m}_1} = \frac{1}{2\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) \left[B_2^c(u) \sin \omega_0 u + B_2^s(u) \cos \omega_0 u \right] du .$$

Залежності кореляційних компонентів $B_0(u)$ і $B_2^{c,s}(u)$ від авто- та взаємкореляційних функцій квадратур $\xi_c(t)$ і $\xi_s(t)$ мають вигляд:

$$B_0(u) = \frac{1}{2} \left[R_c(u) + R_s(u) \right] \cos \omega_0 u + R_{cs}^-(u) \sin \omega_0 u ,$$

$$B_2^c(u) = \frac{1}{2} \left[R_c(u) - R_s(u) \right] \cos \omega_0 u + R_{cs}^+(u) \sin \omega_0 u ,$$

$$B_2^s(u) = R_{cs}^+(u) \cos \omega_0 u - \frac{1}{2} \left[R_c(u) - R_s(u) \right] \sin \omega_0 u .$$

Тут $R_{c,s}(u) = E \xi_{c,s}(t) \xi_{c,s}(t+u)$, а $R_{cs}^+(u)$ і $R_{cs}^-(u)$ – парна і непарна частини взаємкореляційної функції $R_{c,s}(u) = E \xi_{c,s}(t) \xi_{c,s}(t+u)$.

Покладемо:

$$R_c(u) = A_c e^{-\alpha_c |u|}, \quad R_s(u) = A_s e^{-\alpha_s |u|},$$

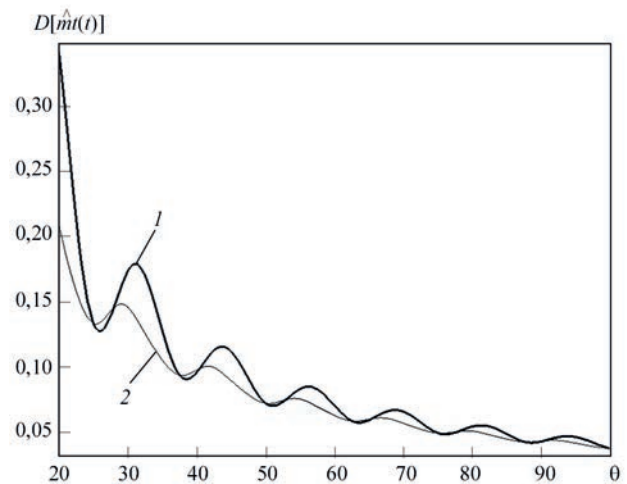


Рис. 1. Дисперсії оцінки найменших квадратів (1) і компонентної оцінки (2) математичного сподівання від кореляційних компонентів сигналу і довжин відрізка реалізації θ : $A_c = 0,6$; $A_s = 0,3$; $\alpha_c = 0,4$; $\alpha_s = 0,4$; $\alpha_{cs} = 0,2$; $T = 25$

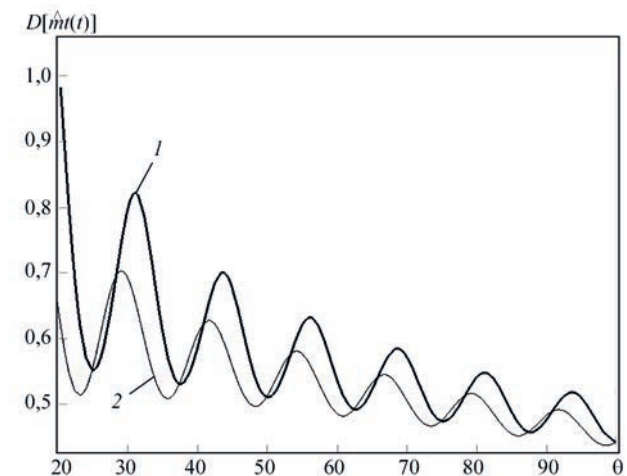


Рис. 2. Дисперсії оцінки найменших квадратів (1) і компонентної оцінки (2) математичного сподівання від кореляційних компонентів сигналу і довжин відрізка реалізації θ : $A_c = 0,6$; $A_s = 0,3$; $\alpha_c = 0,01$; $\alpha_s = 0,01$; $\alpha_{cs} = 0,005$; $T = 25$

$$R_{cs}^+(u) = A_{cs} e^{-\alpha_{cs}|u|}, R_{cs}^-(u) = 0$$

і обчислимо дисперсії компонентної оцінки та оцінки найменших квадратів для певних параметрів цих апроксимацій. Результати обчислень у вигляді графічних залежностей дисперсій від довжини реалізації θ показано на рис. 1, 2. Обидва графіки мають форму зникаючих осциляцій, при цьому амплітуда для оцінки найменших квадратів є більшою. Різниця між дисперсією стає більшою, якщо швидкість зникання кореляційних зв'язків зменшується. Однак значення дисперсій стають все ближчими, коли зростає довжина реалізації. Для довжин θ , які є більшими від $25\alpha T$, різницею між ними можна нехтувати.

Висновки

Таким чином, дисперсія оцінки математичного сподівання, що отримується за допомогою методу найменших квадратів, на відміну від компонентної оцінки є незміщеною для довільних довжин відрізка реалізації θ . Це означає, що в цьому випадку відсутній ефект просочування.

Дисперсія оцінки найменших квадратів, як показують результати обчислень, може бути суттєво більшою від дисперсії компонентної тільки при обробці коротких реалізацій. При цьому різниця між ними є більшою для повільно зникаючих кореляційних зв'язків. При великих довжинах реалізацій різниця між ними є нехтовно малою.

Наведені властивості оцінки найменших квадратів слід враховувати при обробці сигналів, довжини реалізацій яких містять мале число періодів нестационарності. Зауважимо, що подібні властивості має оцінка кореляційної функції (3) у випадку, коли оцінки кореляційних компонентів знаходяться як розв'язки системи лінійних рівнянь (5).

Список літератури/References

1. Яворський І.М. (2013) *Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань*, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів.
2. Javorskyj, I.M. (2013) *Mathematical models and analysis of stochastic oscillations*. Lviv, PMI [in Ukrainian].
3. Hurd, H.L. (1991) Correlation theory of almost periodically correlated processes. *J. Multivariate Anal.*, **37**, 24–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(91\)90109-F](https://doi.org/10.1016/0047-259X(91)90109-F)
4. Matsko, I., Javorskyj, I., Isaev, I. et al. (2009) Methods for enhancement of the efficiency of statistical analysis of vibration signals from the bearing supports of turbines at thermal-electric power plants. *Mater. Sci.*, **45**(3), 378–391. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11003-009-9202-7>
5. Javorskyj, I., Kravets, I., Matsko, I., Yuzefovych, R. (2017) Periodically correlated random processes: application in early diagnostics of mechanical systems. *Mech. Syst. and Sign. Process.*, **83**, 406–438. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.06.022>
6. Javorskyj, I., Matsko, I., Yuzefovych, R. et al. (2021) Methods of Hidden Periodicity Discovering for Gearbox Fault Detection. *Sensors*, **21**(18), 6138. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21186138>
7. McCormick, A.C.; Nandi, A.K. (1998) Cyclostationarity in rotating machine vibrations. *Mech. Syst. and Sign. Process.*, **12**(2), 225–242. DOI: <https://doi.org/10.1006/mssp.1997.0148>
8. Capdessus, C., Sidahmed, M., Lacoume, J.L. (2000) Cyclostationary processes: application in gear faults early diagnosis. *Mech. Syst. and Sign. Process.*, **14**(3), 371–385. DOI: <https://doi.org/10.1006/mssp.1999.1260>
9. Dalpiaz, G., Rivola, A., Rubini, R. (2000) Effectiveness and sensitivity of vibration processing techniques for local fault detection in gears. *Mech. Syst. and Sign. Process.*, **14**(3), 387–412. DOI: <https://doi.org/10.1006/mssp.1999.1294>
10. Bouillout, L., Sidahmed, M. (2001) Cyclostationary approach and bilinear approach: comparison, applications to early diagnostics for helicopter gearbox and classification method based on HOCS. *Mech. Syst. and Sign. Process.*, **15**(5), 923–943. DOI: <https://doi.org/10.1006/mssp.2001.1412>
11. Antoniadis, I., Glossiotis, G. (2001) Cyclostationary analysis of rolling element bearing vibration signals. *J. Sound Vib.*, **248**(5), 829–845. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3815>
12. Antoni, J., Bonnardot, F., Raad, A., El Badaoui, M. (2004) Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals. *Mech. Syst. and Sign. Process.*, **18**, 1285–1314. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0888-3270\(03\)00088-8](https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00088-8)
13. Li, L., Qu, L. (2003) Cyclic statistics in rolling bearing diagnosis. *J. Sound Vib.*, **267**(2), 253–265. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01412-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01412-8)
14. Zhu, Z., Kong, F. (2005) Cyclostationary analysis for gearbox condition monitoring: approaches and effectiveness. *Mech. Syst. and Sign. Process.*, **19**(3), 467–482. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2004.02.007>
15. (1994) *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*. Ed. by W.A. Gardner. IEEE Press, New York.
16. Gardner, W.A. (1985) *Introduction to Random Processes with Application to Signals and Systems*. New York, Macmillan.
17. Hurd, H.L., Miamee, A. (2007) *Periodically Correlated Random Sequences. Spectral Theory and Practice*. Wiley-Interscience, New Jersey.
18. Dehay, D., Hurd, H.L. (1994) *Representation and estimation for periodically and almost periodically correlated random processes. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*. IEEE Press, New York, 295–326.
19. Antoni, J. (2009) Cyclostationarity by examples. *Mech. Syst. and Sign. Process.*, **23**(4), 987–1036. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.10.010>
20. Randall, R.B., Antoni, J. (2011) Rolling element bearing diagnostics – A tutorial. *Mech. Syst. and Sign. Process.*, **25**(2), 485–520. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2010.07.017>
21. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I., Zakrzewski, Z. (2022) The least square estimation of the basic frequency for periodically non-stationary random signals. *Digit. Signal Process.*, **122**, 103333. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103333>

SELECTION AND ANALYSIS OF THE DETERMINISTIC COMPONENT OF VIBRATIONS BY THE LEAST SQUARES METHOD

R.M. Yuzefovych^{1,2}, I.M. Javorskyj^{1,3}, O.V. Lychak¹, V.V. Gnatyshyn², M.Z. Varyvoda¹

¹G.V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of NASU. 5 Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine. E-mail: roman.yuzefovych@gmail.com

²Lviv Polytechnic National University. 12 S. Bandery str., 79000, Lviv, Ukraine.

³Bydgoszcz University of Sciences and Technology. 7, Prof. S. Kaliskiego al., 85796, Bydgoszcz, Poland.

The results of investigations by the least squares method of the mathematical expectation of periodically nonstationary random processes as a mathematical model of stochastic vibrations are considered. Analysis of the dependencies which determine the statistical characteristics of evaluation was performed. Examples of analysis of typical processes are given. 20 Ref., 2 Fig.

Keywords: periodically correlated random processes (PCRP), vibration, mathematical expectation, correlation function, evaluation by the least squares method, dispersion

Надійшла до редакції 28.04.2023